

Étude de laboratoire - ASD

Binôme A11
SIMON Léo, LEVY-FALK Hugo
Supélec, promo 2020

4 février 2018

Table des matières

I	Objectifs de ce TL	3
II	Génération de carte routière réaliste	3
1	Condition pour un graphe de Gabriel	3
2	Mise en pratique : graphe de Gabriel et de voisinage relatif	3
2.1	Création de graphe de Gabriel et de voisinage relatif	3
2.2	Génération d'un réseau	6
2.3	Temps de génération d'un réseau	6
3	Triangulation de Delaunay	6
3.1	Pratique	6
3.2	Aspect théorique	6
3.2.1	Condition pour un graphe de Delaunay	6
3.2.2	Le graphe de Delaunay est planaire	7
3.2.3	Le graphe de Delaunay est une triangulation	7
3.2.4	Condition sur les faces	8
III	Algorithme de Dijkstra pour la recherche du plus court chemin	8

Table des figures

1	Différentes positions possible de points par rapport à A et B	3
2	Graphe de gabriel	4
3	Graphe de voisinage relatif	5
4	Réseau généré	6
5	Cas où le graphe de Delaunay n'est pas planaire.	7
6	Maille polygonale.	8

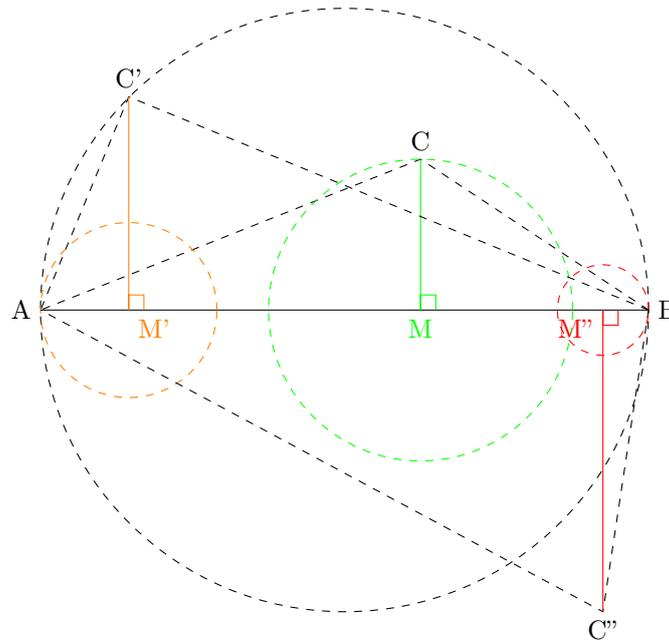


FIGURE 1 – Différentes positions possible de points par rapport à A et B

Première partie

Objectifs de ce TL

Deuxième partie

Génération de carte routière réaliste

1 Condition pour un graphe de Gabriel

En notant $\mathcal{V} = \{P_i\}_{1 \leq i \leq n}$ un nuage de $n \in \mathbb{N}$ points dans le plan représentant des villes, on définit pour tout $A, B \in \mathcal{V}$, $d(A, B)$ la distance à vol d'oiseau entre les deux villes. On décide de placer une arête entre deux points A et B du plan si et seulement si,

$$\forall C \in \mathcal{V}, \forall M \in [A, B], d(M, C) \geq \min\{d(M, A), d(M, B)\} \quad (1)$$

Montrons que la condition 1 est équivalente à ce que pour toute paire de sommets (A, B) du nuage, $\{A, B\}$ forme une arête si et seulement si il n'existe pas de points $C \in \mathcal{V}$ dans le cercle de diamètre $[A, B]$. Un graphe vérifiant cette condition sera par la suite appelé *graphe de Gabriel*.

preuve : Soient $A, B \in \mathcal{V}$ et on appelle \mathcal{C} le cercle de diamètre $[A, B]$. La figure 1 montre différentes positions possibles de points.

Supposons qu'il existe une arête reliant les deux points. Si il existe des points du nuage dans le disque ouvert délimité par \mathcal{C} , alors il existe un point M qui ne vérifie pas la condition 1, *absurde*.

Réciproquement, si tous les points de \mathcal{V} sont à l'extérieur du cercle ouvert délimité par \mathcal{C} , (dans l'exemple C' et C''), alors pour tout $P \in \mathcal{V} \setminus \{A, B\}$, le point $M \in [A, B]$ le plus proche de P vérifie la condition 1 (dans l'exemple, les points M' et M''). \square

2 Mise en pratique : graphe de Gabriel et de voisinage relatif

2.1 Création de graphe de Gabriel et de voisinage relatif

En traçant les graphes de Gabriel (figure 2) et de voisinage relatif (figure 3), on observe que le second est inclus dans le premier.

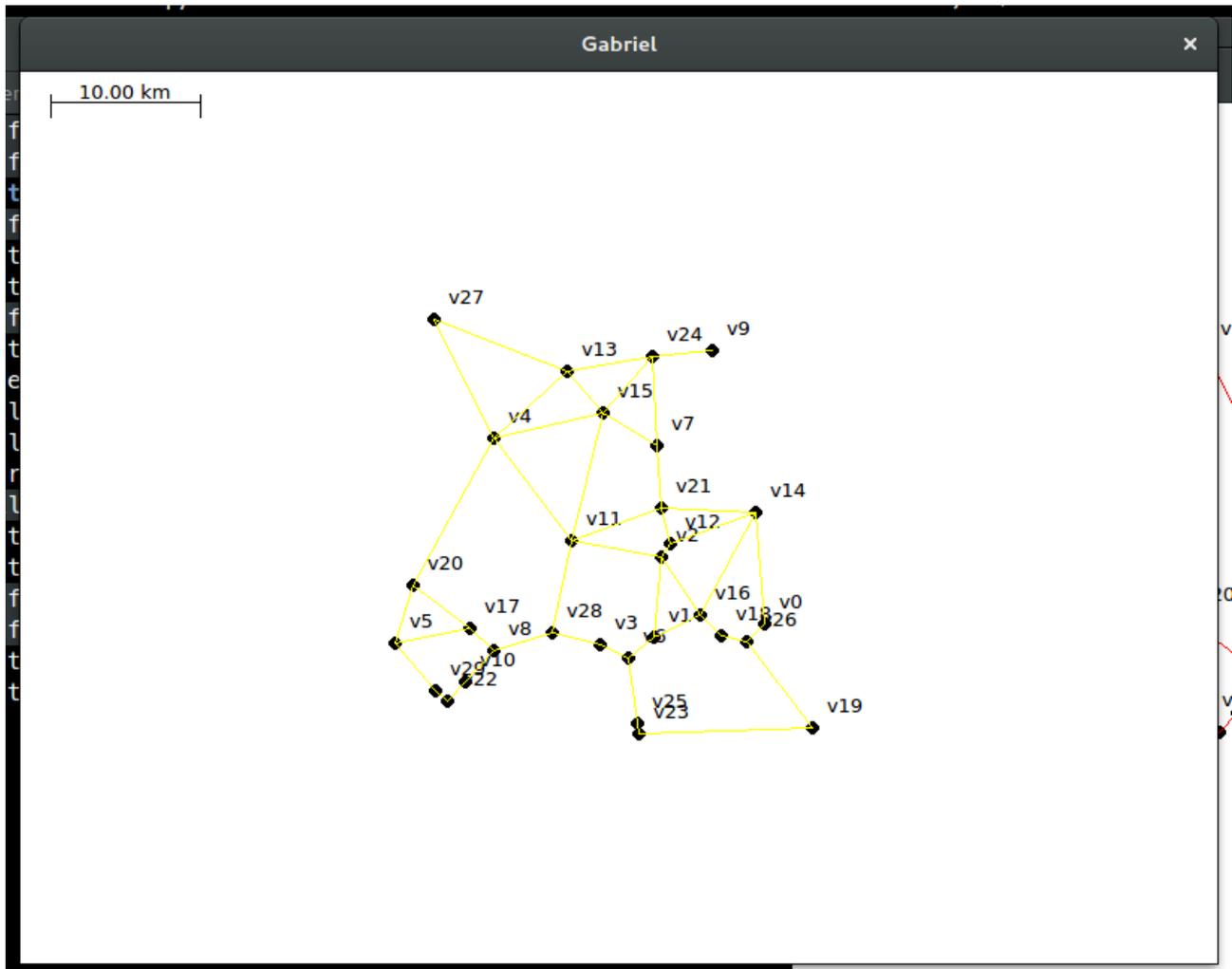


FIGURE 2 – Graphe de gabriel

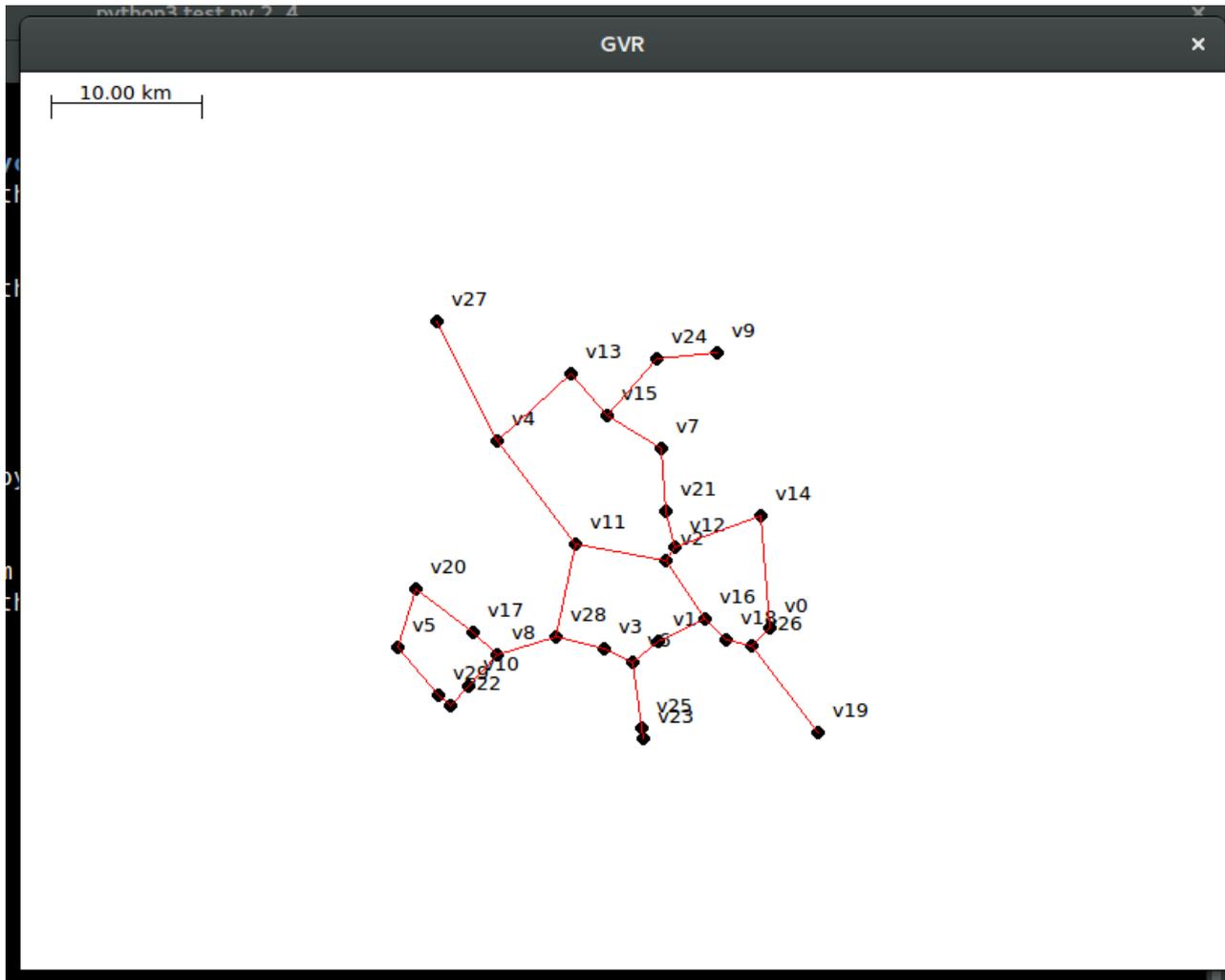


FIGURE 3 – Graphe de voisinage reelatif

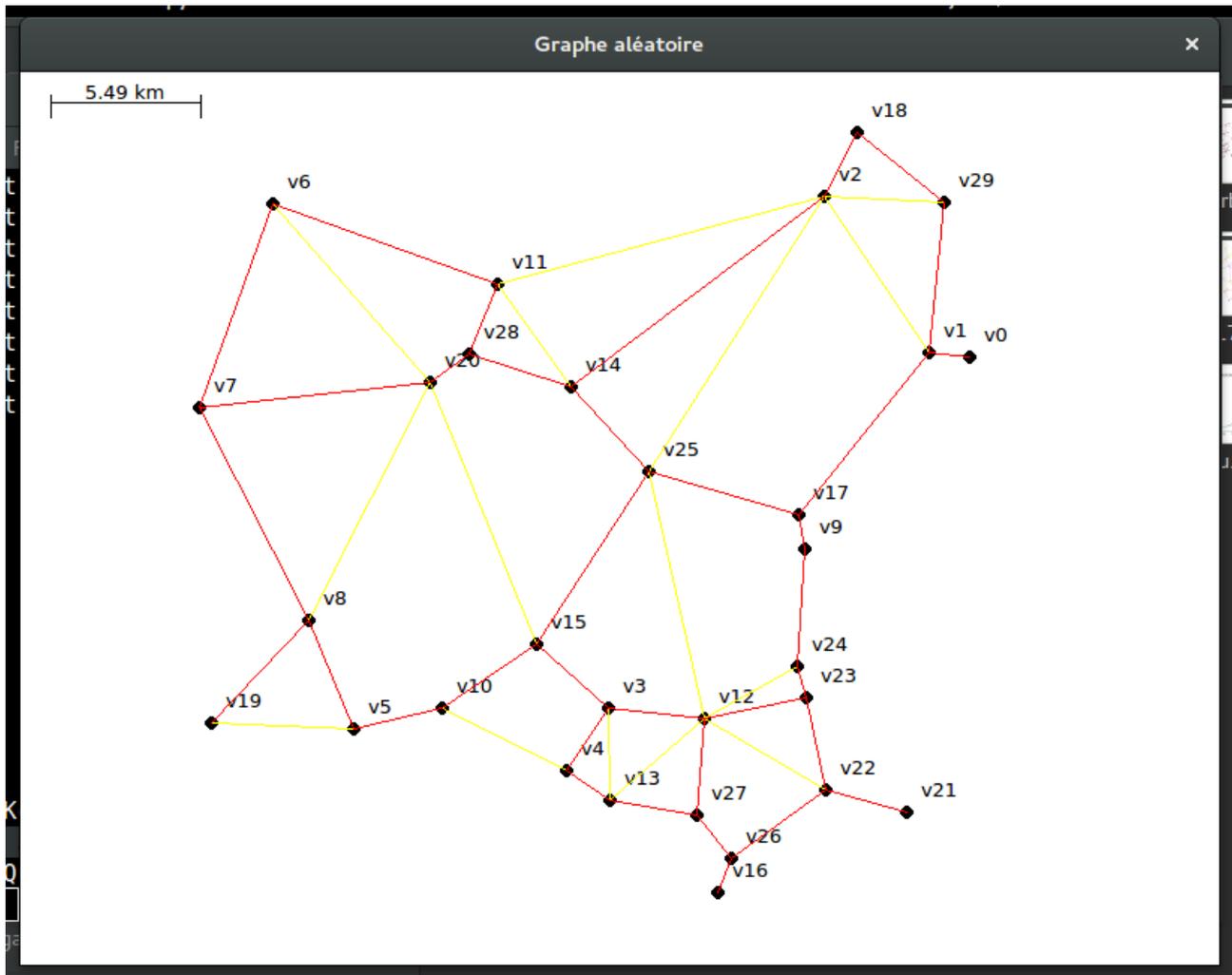


FIGURE 4 – Réseau généré

2.2 Génération d'un réseau

En combinant la génération de graphe de Gabriel et de voisinage relatif, on peut générer un réseau routier, comme le montre la figure 4.

2.3 Temps de génération d'un réseau

3 Triangulation de Delaunay

3.1 Pratique

3.2 Aspect théorique

3.2.1 Condition pour un graphe de Delaunay

Pour toute paire $\{A, B\}$ de points de \mathcal{V} , si on appelle \mathcal{P} et \mathcal{P}' les deux demis plans fermés de frontière (A, B) privés de A et B , alors $\{A, B\}$ est une arête de la triangulation de Delaunay si et seulement si

$$\forall C \in \mathcal{P} \cap \mathcal{V}, \forall D \in \mathcal{P}' \cap \mathcal{V}, \widehat{ACB} + \widehat{ADB} \leq \pi$$

preuve : Supposons que $\{A, B\}$ soit une arête. Il existe donc un cercle \mathcal{C} d'intérieur vide avec A et B sur le cercle. Cela correspond aux lignes $\mathcal{L}(\theta, A, B)$ et $\mathcal{L}(\pi - \theta, A, B)$. Quitte à renommer \mathcal{P} et \mathcal{P}' , on peut supposer que le premier contour correspond à \mathcal{P} . On a donc :

$$\forall C \in \mathcal{P} \cap \mathcal{V}, \widehat{ACB} < \theta \tag{2}$$

$$\forall D \in \mathcal{P}' \cap \mathcal{V}, \widehat{ADB} < \theta - \pi \tag{3}$$

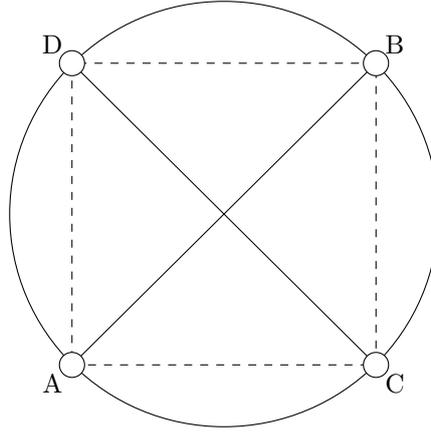


FIGURE 5 – Cas où le graphe de Delaunay n'est pas planaire.

Ainsi :

$$\forall C \in \mathcal{P} \cap \mathcal{V}, \forall D \in \mathcal{P}' \cap \mathcal{V}, \widehat{ACB} + \widehat{ADB} \leq \pi$$

Supposons maintenant que :

$$\forall C \in \mathcal{P} \cap \mathcal{V}, \forall D \in \mathcal{P}' \cap \mathcal{V}, \widehat{ACB} + \widehat{ADB} \leq \pi$$

Posons :

$$m_p = \max_{C \in \mathcal{P} \cap \mathcal{V}} \widehat{ACB} \quad (4)$$

$$m_{p'} = \max_{D \in \mathcal{P}' \cap \mathcal{V}} \widehat{ADB} \quad (5)$$

On a donc

$$m_p + m_{p'} \leq \pi$$

D'après le théorème de l'angle inscrit, si on pose $\theta = \max\{m_p, m_{p'}\}$, les contours $\mathcal{L}(\theta, A, B) \cap \mathcal{P}$ et $\mathcal{L}(\pi - \theta, A, B) \cap \mathcal{P}'$ forment un cercle d'intérieur vide avec A et B sur le cercle. \square

3.2.2 Le graphe de Delaunay est planaire

On remarque qu'il existe des configurations pour lesquelles cette assertion est fautive, par exemple la figure 5. On va donc supposer que les configurations défavorables (4 points sur un cercle) ont une probabilité nulle d'être rencontrées.

preuve Si l'on suppose qu'il existe deux arêtes $\{A, B\}$ et $\{C, D\}$ qui se croisent, on a alors $\widehat{ADB} + \widehat{ACB} < \pi$ et $\widehat{DBC} + \widehat{DAC} < \pi$. Or $ABCD$ est un quadrilatère, donc $\widehat{ADB} + \widehat{ACB} + \widehat{DBC} + \widehat{DAC} = 2\pi$, contradiction. \square

3.2.3 Le graphe de Delaunay est une triangulation

Montrons que le graphe de Delaunay est une triangulation.

preuve Supposons qu'il existe une face polygonale à plus de 3 côtés dans le graphe de Delaunay. On choisit quatre points A, B, C, D de cette faces tels que $\{A, C\}$ et $\{B, D\}$ peuvent être des arêtes, mais pas $\{A, B\}$ et $\{C, D\}$. On a par exemple une maille semblable à la figure 6.

On a alors :

$$\widehat{ACB} + \widehat{ADB} > \pi \quad (6)$$

$$\widehat{CAD} + \widehat{CBD} > \pi \quad (7)$$

$$(8)$$

Puisque $ACDB$ est un quadrilatère, la somme de ses angles devrait être de 2π , ce qui est absurde ici. \square

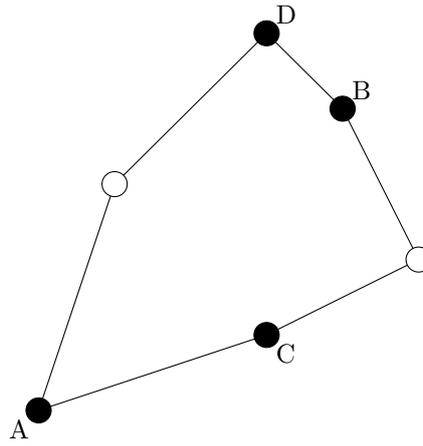


FIGURE 6 – Maille polygonale.

3.2.4 Condition sur les faces

Montrons tout triplet $\{A, B, C\} \subseteq \mathcal{V}$ est une face de la triangulation si et seulement si le disque du cercle circonscrit au triangle ABC est vide de tout point de \mathcal{V} autre que A, B, C .

preuve Supposons que le disque du cercle \mathcal{C} circonscrit à ABC soit vide de tout point. On va montrer que l'arête A, B existe. On pose $\theta = \widehat{ACB}$. On a alors $\mathcal{C} = (\mathcal{L}(\theta, A, B) \cap \mathcal{P}) \cup (\mathcal{L}(\pi - \theta, A, B) \cap \mathcal{P}')$. Puisque le disque est vide,

$$\forall D \in \mathcal{P}' \cap \mathcal{V}, \widehat{ADB} < \pi - \theta$$

Donc, puisque C est le point de plus grand angle sur \mathcal{P} :

$$\forall E \in \mathcal{P} \cap \mathcal{V}, \forall D \in \mathcal{P}' \cap \mathcal{V}, \widehat{AEB} + \widehat{ADB} \leq \pi$$

Donc l'arête $\{A, B\}$ existe. On montre de la même façon que $\{A, C\}$ et $\{C, B\}$ existent.

Supposons que $\{A, B, C\}$ soit une face de la triangulation. En particulier, C est alors le point de plus grand angle $\widehat{ACB} = \theta$ sur \mathcal{P} . Puisque $\{A, B\}$ est une arête, d'après le lemme, tout point $D \in \mathcal{P}' \cap \mathcal{V}$ est d'angle \widehat{ADB} plus petit que $\pi - \theta$. Donc un tel point D ne peut être dans le disque délimité par $(\mathcal{L}(\theta, A, B) \cap \mathcal{P}) \cup (\mathcal{L}(\pi - \theta, A, B) \cap \mathcal{P}')$. \square

Troisième partie

Algorithme de Dijkstra pour la recherche du plus court chemin